

# “Dimensionamento óptimo de um cabo eléctrico”

Rui Assis

Engenheiro Mecânico IST

[rassis@netcabo.pt](mailto:rassis@netcabo.pt)

Janeiro/2000

## Resumo

*Descreve-se a forma de seleccionar um cabo eléctrico, optando pelo material da alma condutora (alumínio ou cobre) e calculando a secção mais económica. O perfil das necessidades energéticas previstas para os próximos anos bem como a vida útil do cabo, tendo em conta a incerteza, são descritas em termos probabilísticos. Descreve-se um modelo matemático que relaciona as diferentes variáveis físicas e económicas que caracterizam cada uma das duas alternativas de material. Recorre-se ao método de Monte-Carlo para simular as necessidades energéticas em cada ano e a vida útil do cabo. Em cada iteração, calculam-se os valores particulares dos custos (pertinentes para a decisão) ao longo do ciclo de vida do cabo. Estes valores particulares vão interagir no modelo e originar, para cada material, outros tantos valores da variável de saída: a secção óptima do cabo. Estes valores da variável de saída são depois tratados estatisticamente, o que permite construir um intervalo de confiança da secção óptima para cada alternativa de material e, em consequência, seleccionar de uma tabela comercial a secção do cabo que mais se aproxime. Demonstra-se assim a utilidade de uma análise integrada “técnico-económica” em contexto de incerteza, cuja oportunidade se verifica em tantos projectos de Engenharia.*

## Palavras-chave

Apoio à decisão, ciclo de vida, optimização, previsões, simulação de Monte Carlo.

## Introdução

Existem muitos casos de dimensionamento em engenharia nos quais, o valor de uma variável dimensional de um componente de um sistema é seleccionado a partir de tabelas comerciais. Estas constituem adaptações de normas vigentes cuja concepção obedeceu exclusivamente (ou quase) a critérios de natureza técnica. Esta abordagem revela-se desajustada nos dias de hoje, pois não equaciona devidamente as justas preocupações com a economia dos recursos e com o meio ambiente.

A selecção do valor daquela variável deve, em última análise, resultar da ponderação dos vários custos previstos ao longo do chamado “ciclo de vida” do elemento a dimensionar e considerados pertinentes para o processo de decisão. Este valor da variável torna mínima a soma de todos os custos (de investimento, de exploração e de desactivação). Constitui, pois, um valor “ótimo” na perspectiva económica, o qual deverá ser eleito num processo de selecção entre várias alternativas. Não é assim, contudo, que as coisas funcionam na prática; Quando a componente económica é introduzida na análise, constitui procedimento generalizado e incorrecto decidir apenas com base no preço de aquisição (custo do investimento) mais baixo. Muitos decisores esquecem (ou desconhecem?) que, ser mais económico representa “o menor custo do ciclo de vida” e não “o menor investimento” – já lá diz o ditado: “O que é barato sai caro”!.

Descreve-se seguidamente um caso ilustrativo de abordagem na perspectiva económica de um problema de dimensionamento em engenharia.

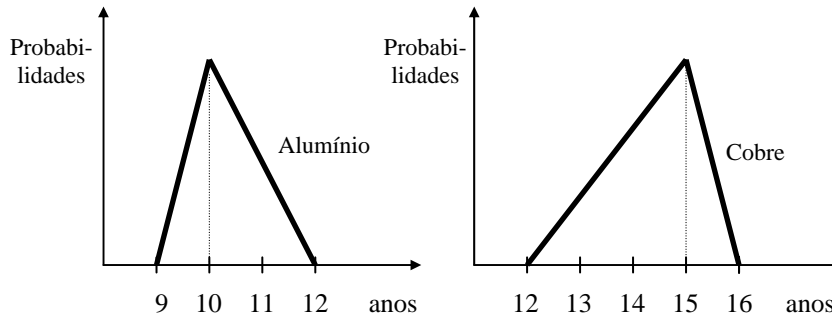
## Caso de um cabo eléctrico

Uma empresa industrial vai expandir as suas instalações fabris. Para o efeito, decidiu construir um novo edifício, o qual vai necessitar de alimentação eléctrica. Esta alimentação pode realizar-se através de um cabo enterrado trifásico em BT (3x380 V) a partir de um transformador situado a 150 metros. Os materiais comumente utilizados nas almas condutoras dos cabos eléctricos são o Cobre e o Alumínio. As características físicas dos materiais, os custos da aquisição e montagem e ainda a vida útil estimada de cada alternativa, encontram-se descritos no Quadro 1.

*Quadro 1 - Características dos materiais e custos da aquisição e montagem do cabo*

Características dos materiais	Cobre	Alumínio
. Comprimento (m)	150	150
. Custo de aquisição + montagem:	-	-
- Componente fixa (\$):	50.000	40.000
- Componente variável (\$/Kg):	1.000	800
. Vida útil (anos)	-	-
- perspectiva optimista:	16	12
- perspectiva mais provável:	15	10
- perspectiva pessimista:	12	9
. Valor residual (\$/Kg)	250	150
. Resistividade ( $\Omega$ .m)	$1,7 \times 10^{-8}$	$2,8 \times 10^{-8}$
. Peso específico (Kg/m <sup>3</sup> )	8.900	2.700

A vida útil do cabo (nas duas alternativas) foi estimada não por um único valor (normalmente o mais provável), mas por um intervalo de valores de acordo com uma distribuição triangular de probabilidades (ver Figura 1), assumindo-se assim a incerteza – comum nestes contextos decisórios. Embora existam outras distribuições de probabilidade assimétricas (Beta, Gamma, logNormal) que podiam descrever a vida útil expectável, a utilização da distribuição triangular constitui uma aproximação suficiente.



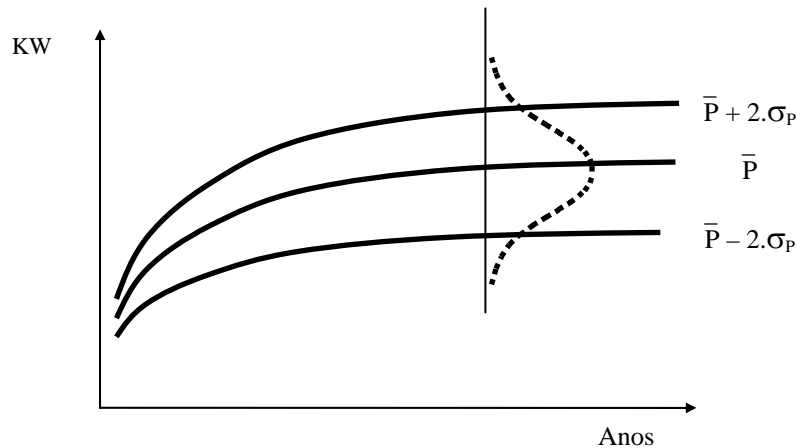
*Figura 1 – Distribuição de probabilidades da vida útil do cabo nas alternativas Alumínio e Cobre*

A evolução previsionial da potência activa necessária, bem como do factor de potência e do regime de utilização durante o período de vida útil do cabo (o mais longo das duas alternativas) encontram-se descritos no Quadro 2.

*Quadro 2 - Evolução previsionial das necessidades de potência*

Anos	Potência média $\bar{P}$ (KW)	Desvio padrão $\sigma$ (% da média)	Factor potência (cos $\phi$ )	Regime médio (dias/ano)	Regime médio (horas/dia)
1	100	5%	0,8	230	8
2	120	6%	0,8	230	8
3	140	7%	0,8	230	8
4	160	8%	0,85	230	8
5	170	9%	0,85	230	8
6	180	10%	0,85	230	10
7	190	11%	0,9	230	10
8	200	12%	0,9	230	12
9	200	13%	0,9	230	15
10	200	14%	0,9	230	15
11	200	15%	0,9	230	15
12	200	16%	0,9	230	15
13	200	17%	0,9	230	15
14	200	18%	0,9	230	15
15	200	19%	0,9	230	15
16	200	20%	0,9	230	15

O grau de incerteza da potência necessária é traduzido pelo desvio padrão (estimado em percentagem da média) de uma distribuição de probabilidade Normal que vai, logicamente, crescendo com o alongamento do horizonte temporal (coluna 3 do Quadro 2 e Figura 2).



**Figura 2 – Intervalos de amplitude (+/- dois desvios padrões) dos valores previstos das necessidades anuais de potência activa**

O custo actual da energia é de 18\$00/KWh. Considerando uma taxa mínima de rentabilidade em vigor na empresa para este tipo de investimentos de 15% ano e, assumindo que a actividade prossegue após a substituição do cabo no fim da sua vida útil, qual será a alternativa (material e secção) mais económica?

### Forma de resolução

A forma (quase) universal de abordagem deste tipo de problema consiste em considerar apenas critérios técnicos. A este propósito, o construtor francês Merlin Gerin [3], páginas 131 A e 227 B, diz que:

- “A determinação correcta da secção dos condutores de uma canalização é fundamental para a garantia de segurança intrínseca da instalação e é resultado da consideração simultânea de quatro critérios-base distintos: 1) Sobrecargas; 2) Curtos-circuitos; 3) Quedas de tensão; 4) Protecção contra contactos indirectos.”;
- “A secção a escolher deverá ser a maior das secções determinadas por cada critério, arredondada para respeito da normalização de condutores isolados e cabos.”;
- “Além destes critérios técnicos, poderá utilizar-se um outro critério de tipo económico: critério da secção económica ...”;
- “A luta contra as perdas é um objectivo mundial, não só no domínio económico, mas também no domínio ecológico.”;
- “O cálculo da secção económica conduz, por um lado, a importantes economias de energia consumida e, por outro, a uma melhoria do comportamento técnico das canalizações, seja em matéria de fiabilidade (ausência de pontos quentes, melhor comportamento ao choque, aumento de vida útil), seja em matéria de *performances* (melhor comportamento aos curtos-circuitos e sobrecargas, melhores condições de arranque de motores, melhor capacidade de reserva, possibilidade de aumento de comprimento, da carga ligada e de recurso).”

Mostra-se seguidamente como um problema desta natureza, formulado na perspectiva económica e com o grau de generalização descrito anteriormente, pode ser resolvido.

Conforme se disse na introdução, a secção económica do cabo (em cada alternativa do material da alma condutora) resulta da ponderação dos vários custos previstos ao longo do seu ciclo de vida e considerados pertinentes para o processo de decisão. Este valor óptimo  $S^*$  (ver Figura 3) torna mínima a soma dos custos anualizados (investimento e perdas energéticas) e do proveito anualizado do valor residual.

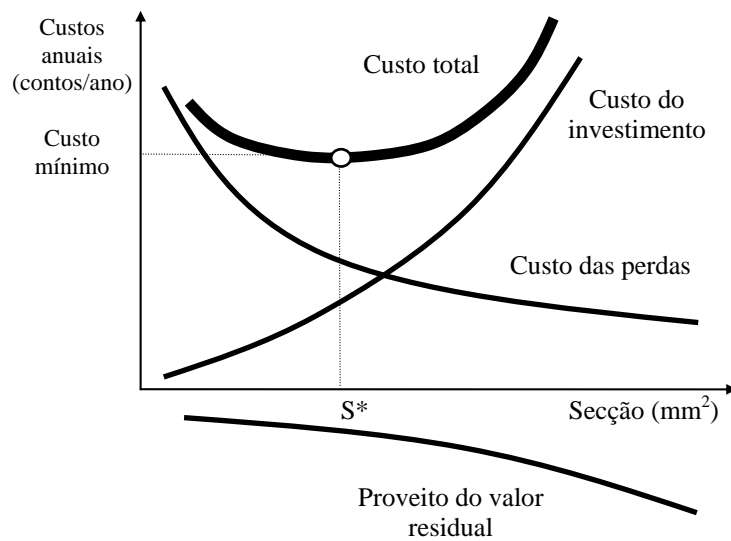


Figura 3 –  
Variação dos custos e proveitos anualizados em função do valor da secção do cabo

A Figura 4 representa graficamente o *cash-flow* que se verificará ao longo do ciclo de vida do cabo eléctrico.

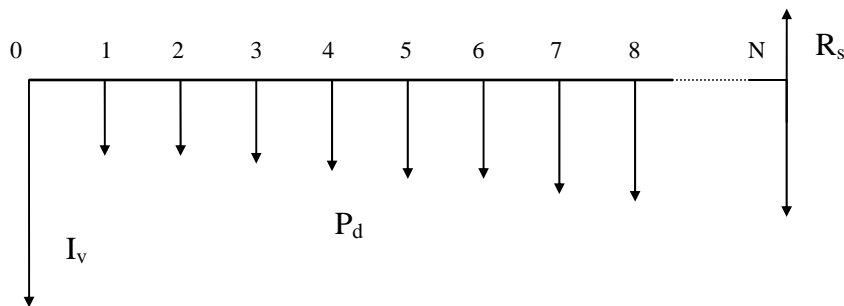


Figura 4 – *Cash-flow* ao longo do ciclo de vida N do cabo

em que:

- $I_v$  - Investimento inicial (contos)
- $P_d$  - Perda de energia em cada ano (contos)
- $R_s$  - Valor residual do cabo (contos)
- $N$  - Vida útil do cabo

Considera-se adequada a análise a preços constantes, tendo em conta que não se prevêem modificações temporais das estruturas dos vários custos considerados. Se assim não fosse, bastaria estimar todos os custos a preços correntes e ajustar a taxa de referência (ou mínima de rentabilidade) da inflação média prevista durante o período de análise.

A energia perdida por um cabo quando atravessado por uma corrente eléctrica é dada por:

$$W = \rho \cdot (L/S) \cdot I^2 \cdot t \quad (1)$$

em que:

- $W$  - Energia perdida (W.h)
- $\rho$  - Resistividade do material ( $\Omega \cdot m$ )
- $L$  - Comprimento do cabo (m)
- $S$  - Secção do cabo ( $m^2$ )
- $I$  - Corrente eléctrica que atravessa o cabo (A)
- $t$  - Tempo durante o qual o cabo é atravessado pela corrente  $I$  (h)

Sendo, por sua vez, a corrente dada por:

$$I = P / (\sqrt{3} \cdot V_c \cdot \cos.\varphi) \quad (2)$$

em que: P - Potência activa (W)  
 $V_c$  - Tensão composta (V)  
 $\cos \varphi$  - Factor de potência

As expressões do investimento  $I_v$ , do valor residual  $R_s$  e das perdas energéticas  $P_d$  em função da secção  $S$  do cabo são deduzidas a seguir:

O valor do investimento  $I_v$  é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Cobre:} \quad I_v &= 50 + 1.000.10^{-3} \times 150 \times S.10^{-6} \times 8,9.10^3 \text{ contos} \\ I_v &= 50 + 1,335.S \text{ contos} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Alumínio:} \quad I_v &= 40 + 800.10^{-3} \times 150 \times S.10^{-6} \times 2,7.10^3 \text{ contos} \\ I_v &= 40 + 0,324.S \text{ contos} \end{aligned} \quad (4)$$

O valor residual  $R_s$  é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Cobre:} \quad R_s &= 250.10^{-3} \times 150 \times S.10^{-6} \times 8,9.10^3 \text{ contos} \\ R_s &= 0,33375.S \text{ contos} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{Alumínio:} \quad R_s &= 150.10^{-3} \times 150 \times S.10^{-6} \times 2,7.10^3 \text{ contos} \\ R_s &= 0,06075.S \text{ contos} \end{aligned} \quad (6)$$

Quanto às perdas energéticas  $P_d$ , substituindo (2) em (1), obtem-se:

$$P_d = W.c = \rho.(L/S).I^2.t.c = \rho.(L/S).[P/(\sqrt{3} \cdot V_c \cdot \cos.\varphi)]^2.t.c \quad (7)$$

em que: c – custo de 1 KW.h (\$/KW.h)

Tendo em conta que, em cada ano, a potência  $P$  necessária assume valores aleatórios dentro dos intervalos definidos anteriormente no Quadro 2, e que o regime de utilização  $t$  (dias/ano x horas/dia) e do factor de potência ( $\cos.\varphi$ ) assumem os valores estimados únicos que se encontram descritos no mesmo Quadro 2, o custo em cada ano será calculado pela expressão (7), resultando:

**Cobre:**

$$P_d = 1,7.10^{-8} \times 150/S.10^{-6} \times [P/(\sqrt{3} \times 380 \times \cos.\varphi)]^2 \times t \times 18.10^{-3} \times 10^{-3} \text{ contos} \quad (8)$$

**Alumínio:**

$$P_d = 2,8.10^{-8} \times 150/S.10^{-6} \times [P/(\sqrt{3} \times 380 \times \cos.\varphi)]^2 \times t \times 18.10^{-3} \times 10^{-3} \text{ contos} \quad (9)$$

O custo uniforme (anualizado) global  $C_g$  será calculado pela soma algébrica dos dois custos (o investimento do ano 0 e as perdas energéticas ao longo dos  $N$  anos) e do proveito (valor residual no fim do ano  $N$ ), depois de uniformizados (anualizados) ao longo do período de vida útil. Ou seja:

$$C_g = I_v.(A/P;15\%;N) - R_s.(A/F;15\%;N) + (A/P;15\%;N) \cdot \sum_{n=1}^{n=N} P_d.(P/F;15\%;n) \quad (10)$$

No modelo, os factores de conversão financeira (A/P;15%;N) e (A/F;15%;N) tomarão valores diferentes em cada iteração pois são função da vida útil N do cabo – valor que é seleccionado aleatoriamente de uma distribuição triangular de probabilidade (ver Figura 1), conforme pressuposto anteriormente.

Como a incógnita do problema (variável de saída no modelo de simulação) é a secção S, torna-se necessário que a expressão (10) seja expressa em função desta variável, de forma a, posteriormente, deduzir o seu valor. Assim, substituindo em (10) as expressões (3), (5) e (8) para o Cobre e (4), (6) e (9) para o Alumínio, obter-se-ão as expressões:

#### Cobre:

$$C_g = (50 + 1,335.S).(A/P;15\%;N) - 0,33375.S.(A/F;15\%;N) + (A/P;15\%;N) \times \sum \left\{ 1,7 \cdot 10^{-8} \times 150/S \cdot 10^{-6} \times [P/(\sqrt{3} \times 380 \times \cos.\varphi)]^2 \times t \times 18 \cdot 10^{-3} \times 10^{-3} \right\} .(P/F;15\%;n) \quad (11)$$

#### Alumínio:

$$C_g = (40 + 0,324.S).(A/P;15\%;N) - 0,06075.S.(A/F;15\%;N) + (A/P;15\%;N) \times \sum \left\{ 2,8 \cdot 10^{-8} \times 150/S \cdot 10^{-6} \times [P/(\sqrt{3} \times 380 \times \cos.\varphi)]^2 \times t \times 18 \cdot 10^{-3} \times 10^{-3} \right\} .(P/F;15\%;n) \quad (12)$$

Conforme se pode facilmente constatar observando as duas expressões anteriores (11) e (12), o custo global  $C_g$  pode ser representado da seguinte forma:

$$C_g = A + B.S + C/S \quad (13)$$

A forma gráfica da expressão (13) é a de uma curva côncava que apresenta um ponto de ordenada mínima. A este ponto corresponde, nas abcissas, o valor procurado da secção ótima  $S^*$ . Este valor  $S^*$  é calculado, derivando (13) em ordem a S e igualando o resultado a zero.

$$dC_g/dS = B - C/S^2 = 0 \Rightarrow S^* = \sqrt{(C/B)} \text{ mm}^2 \quad (14)$$

A resolução analítica do problema é impossível. Para prosseguir, tem de se criar um modelo de simulação e recorrer ao método de Monte Carlo. Este método de simulação permite seleccionar aleatoriamente, em cada iteração, um valor de cada variável probabilística (a potência necessária em cada ano e a vida útil do cabo). Os valores assim conseguidos vão interagir no modelo com as variáveis determinísticas e originar um valor particular da variável de saída (a secção  $S^*$  do cabo). Os diferentes valores da secção do cabo  $S_i^*$ , uma vez tratados em frequência e passados num teste de hipótese de Qui-quadrado a um nível de significância de 5%, permitem confirmar a sua aderência a uma distribuição de probabilidade Normal e, logo, construir um intervalo de confiança da média (secção ótima  $S^*$ ) para um nível de significância considerado aceitável.

A título de exemplo, mostra-se seguidamente o resultado de uma destas iterações conseguida num modelo construído no *software* EXCEL.

**Cobre:**  $8,551 + 0,228.S - 0,007.S + 9.500,608/S = 0$   
 $S_i^* = \sqrt{[9.500,608/(0,228 - 0,007)]} = 207 \text{ mm}^2$   
 $C_g = 100 \text{ contos/ano}$

**Alumínio:**  $7,970 + 0,064.S - 0,003.S + 13.152,314/S = 0$   
 $S_i^* = \sqrt{[13.152,314/(0,064 - 0,003)]} = 462 \text{ mm}^2$   
 $C_g = 65 \text{ contos/ano}$

Como o custo uniforme global do Alumínio ( $C_g = 65 \text{ contos/ano}$ ) é mais baixo do que o do Cobre ( $C_g = 100 \text{ contos/ano}$ ), a melhor solução consistiria em seleccionar de uma tabela comercial um cabo com alma condutora de Alumínio e com uma secção mais próxima possível de  $462 \text{ mm}^2$ .

Uma análise da sensibilidade de  $C_g$  a diferentes valores de  $S$ , para uma das iterações, conduziu ao resultado que se ilustra graficamente na Figura 5. Conforme se pode observar, o mínimo dos mínimos (minimin) de cada uma das alternativas pertence ao Alumínio.

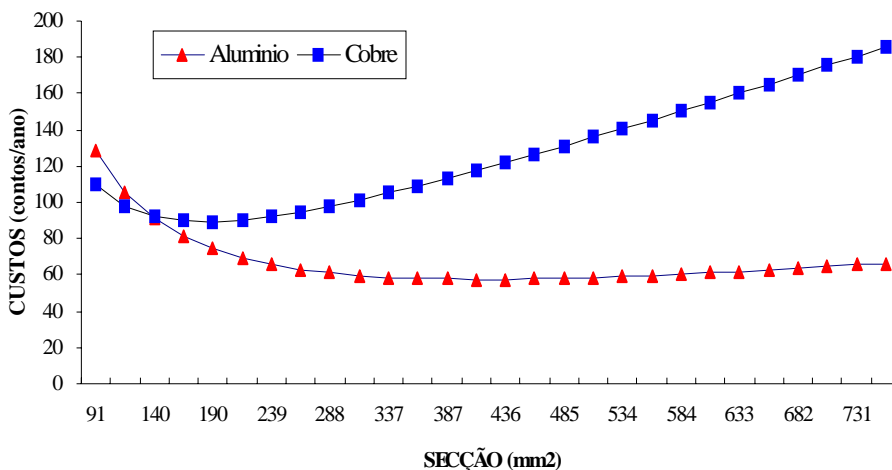


Figura 5 – Custos das alternativas Cobre e Alumínio

Arbitrando um nível de confiança de 95% e “correndo” o modelo 100 vezes, obtiveram-se, finalmente, os seguintes resultados:

**Cobre:**  $\bar{S}^* = 207 \text{ mm}^2$ ;  $s = 7,6 \text{ mm}^2$   
 $\bar{S}^* \pm Z_{\alpha/2} \cdot s / \sqrt{n} = 207 \pm 1,96 \times 7,6 / \sqrt{100} = 207 \pm 1,5 \text{ mm}^2$   
 $\bar{C}_g = 101 \pm 0,58 \text{ contos/ano}$

**Alumínio:**  $\bar{S}^* = 473 \text{ mm}^2$ ;  $s = 22,9 \text{ mm}^2$   
 $\bar{S}^* \pm Z_{\alpha/2} \cdot s / \sqrt{n} = 473 \pm 1,96 \times 22,9 / \sqrt{100} = 473 \pm 4,5 \text{ mm}^2$   
 $\bar{C}_g = 65 \pm 0,42 \text{ contos/ano}$

Como o custo uniforme global do Alumínio ( $C_g = 65 \text{ contos/ano}$ ) é mais baixo do que o do Cobre ( $C_g = 101 \text{ contos/ano}$ ), a melhor solução consiste em seleccionar de uma tabela comer-



cial um cabo com alma condutora de Alumínio e com uma secção mais próxima possível de  $473 \text{ mm}^2$ .

## Conclusões

Este caso permitiu ilustrar uma natureza de problemas comum em gestão e engenharia que necessita de ferramentas de análise financeira, de forma a tornar possível encontrar a melhor solução numa perspectiva integrada técnico-económica, e de ferramentas de simulação numérica de forma a lidar com a complexidade do caso e a natureza probabilística de algumas das variáveis. Esta abordagem de simulação em computador permitiu ter em conta a dose de incerteza subjacente à estimação dos valores das variáveis “potência necessária” e “vida útil do cabo” e emprestou maior realismo à análise. A variabilidade das variáveis de entrada do modelo resulta, por sua vez, em variabilidade do valor da variável de saída (a secção óptima), a qual um método estatístico permite reduzir a um intervalo de confiança suficientemente estreito.

De notar também que, de acordo com o construtor francês Merlin Gerin [3], página 229 B:

- “A secção económica é independente do comprimento da canalização e dos custos fixos de instalação.”
- A escolha da secção final de uma canalização corresponde à escolha da secção económica *uma vez verificados*, para esta secção, os critérios aplicáveis (sobretensões, protecção de pessoas, quedas de tensão)”
- “A secção económica é geralmente mais elevada que a secção técnica (calculada pelos critérios técnicos)”

## Outros casos típicos de optimização económica

Enumeram-se, seguidamente, alguns exemplos em Gestão e Engenharia nos quais a optimização económica se torna desejável.

- Distância óptima económica entre pilares de uma ponte ou viaduto – quanto menor o número de pilares menor o seu custo mas, em contrapartida, maior será o custo do tabuleiro;
- Secção óptima económica de um cabo eléctrico – quanto menor a sua secção menor o custo de investimento e de instalação mas, em contrapartida, maiores serão as perdas de energia dissipada sob a forma de calor;
- Diâmetro óptimo económico de uma tubagem de transporte de um fluído – quanto menor o diâmetro menor o custo da instalação da tubagem mas, em contrapartida, maiores serão as perdas de pressão obrigando a aumentar a potência da bomba e logo o seu custo;
- Lote óptimo económico de encomenda de um artigo para *stock* – quanto menor a sua dimensão menor o *stock* médio e, logo, o custo de posse mas, em contrapartida, maior será a frequência de encomendas e, logo, maior o custo administrativo e de transporte;
- Nº óptimo de operações de repintura de uma chapa (sujeita a corrosão) antes de atingir uma espessura limite mínima que imponha a sua substituição – existe um nº limite de repinturas acima do qual será mais económico substituir imediatamente em vez de continuar a pintar;

- Vida óptima económica de um equipamento – com a idade deste, o custo do investimento baixa, mas, em contrapartida, os custos da manutenção e os custos de operação (devido ao decréscimo progressivo da produtividade) crescem e o proveito residual reduz-se;
- Nº óptimo de cavidades moldantes num molde de injeção ou de compressão de plástico – quanto maior for o nº projectado de cavidades, menor será o custo de produção das peças obtidas e o custo dos *set-up* necessários mas, em contrapartida, maior será o custo do investimento e o custo de posse das peças produzidas em antecipação às necessidades, e que vão para *stock*;
- Comprimento limite mínimo económico de sobras em armazém – existe um comprimento limite abaixo do qual a esperança matemática de encaixe por venda para o mercado se torna inferior ao potencial de encaixe resultante da venda imediata para uma utilização alternativa (sucata, por exemplo).

### **Bibliografia relacionada**

- [1] ASSIS, Rui e Mário Figueira, - MICROINVEST, *Projectos de Investimento - Avaliação e Planeamento*, Lisboa, IAPMEI, 1994
- [2] CANADA, John R., William Sullivan, John A. White, *Capital Investment Analysis for Engineering and Management*, Prentice Hall, Inc., New Jersey 1996
- [3] Pinto, L.M. Vilela, *MGCALC*, Merlin Gerin de Portugal, Lisboa 1993
- [4] THUESEN, Fabrycky, *Engineering Economy*, Prentice-Hall International Editions, 1989

Rui Assis  
Janeiro/2000